
Energía eólica y Geoestadística. Superando la isotropía y la estacionariedad, incrementando la rentabilidad.

José-María Montero

Universidad de Castilla-La Mancha

Jorge Mateu

Universidad Jaume I, Castellón

Emilio Porcu

Georg-August-Universität Göttingen

Gema Fernández-Avilés

Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

La relevancia de la energía renovable, en general, y de la energía eólica, en particular, es cada vez mayor en la sociedad actual. No obstante, existe una importante controversia acerca de su rentabilidad. Es por ello que en este artículo se proponen nuevas funciones de covarianza capaces de mejorar la medición de las dependencias espacio-temporales de la fuerza del viento, lo cual redundará en la mejor determinación de la ubicación de los parques eólicos y en la mejora de la rentabilidad de los mismos. En concreto, se propone un amplio abanico de nuevas familias de funciones de covarianza espacio-temporales anisotrópicas, así como no estacionarias.

Palabras clave: energía eólica, Geoestadística, función de covarianza, anisotropía, no estacionariedad.

Clasificación JEL: C21, Q47, L94

* Los autores agradecen los comentarios realizados por los dos evaluadores anónimos, por cuanto han permitido mejorar sustantivamente el contenido del artículo.

Wind Energy and Geostatistics. Getting over isotropy and non-stationarity, increasing profitability.

Abstract

It is well known the increasing importance of renewable energies and in particular of the wind energy in the current society. However, there is an important controversy about its profitability. This is the reason why this article proposes new covariance functions that allow for improving the estimation of the spatial-temporal dependencies of the wind force, which is crucial to an optimal location of wind farms and to the increasing of their profitability. In particular, a wide range of new families of anisotropic and non stationary covariance functions are proposed.

Key words: wind energy, Geostatistics, covariance function, anisotropic, non-stationary.

JEL Classification: C21, Q47, L94

1.- El estado de la cuestión.

Resulta evidente a todas luces la importancia que está cobrando a escala mundial, y concretamente en nuestro país, la cuestión de las energías renovables y, en particular, la energía eólica.

Y es que la energía eólica es una fuente de energía segura y renovable, no produce emisiones a la atmósfera ni genera residuos, excepción hecha de los de la fabricación de los equipos y el aceite de los engranajes (véase Cuadro 1), opera con instalaciones móviles, su desmantelamiento permite la total recuperación de la zona, tiene un tiempo de construcción ciertamente pequeño (inferior a 6 meses), genera notables beneficios económicos a las áreas afectadas (nos estamos refiriendo al canon anual por ocupación del suelo), utiliza recursos autóctonos, su instalación es compatible con otros muchos usos del suelo y, a pesar del lamentable Informe Calzada, crea puestos de trabajo. También tiene ciertas desventajas, si bien no son comparables con los beneficios que produce: la más citada es su impacto visual, ya que su instalación genera una notable modificación del paisaje; también tiene un cierto impacto sobre la avifauna, principalmente por el choque de las aves contra

Cuadro 1
Comparación del impacto ambiental de las diferentes formas de producir electricidad (en Toneladas por GWh producido).

FUENTE DE ENERGÍA	CO ₂	NO ₂	SO ₂	PARTÍCULAS	CO	HIDRO-CARBUROS	RESIDUOS NUCLEARES	TOTAL
Carbón	1.058,2	2.986	2.971	1,626	0,267	0,102	-	1.066,1
Gas Natural (ciclo combinado)	824	0,251	0,336	1,176	TR	TR	-	825,8
Nuclear	8,6	0,034	0,029	0,003	0,018	0,001	3,641	12,3
Fotovoltaica	5,9	0,008	0,023	0,017	0,003	0,002	-	5,9
Biomasa	0	0,614	0,154	0,512	11,361	0,768	-	13,4
Geotérmica	56,8	TR	TR	TR	TR	TR	-	56,8
Eólica	7,4	TR	TR	TR	TR	TR	-	7,4
Solar Térmica	3,6	TR	TR	TR	TR	TR	-	3,6
Hidráulica	6,6	TR	TR	TR	TR	TR	-	6,6

Fuente: US Department of Energy, Council for Renewable Energy Education y AEDENAT.

TR= trazas.

NOTA: Los valores de emisiones consideran también las emitidas durante el periodo de construcción de los equipos.

las palas y por los efectos, desconocidos, que pueda tener sobre modificación de los comportamientos habituales de migración y anidación. La contaminación acústica es otra de ellas, ya que el roce de las palas con el aire produce un ruido constante (la casa mas cercana deberá estar al menos a 200 m. (43dB(A)).

La potencia eólica instalada acumulada a enero de 2009 a escala mundial alcanzó los 120.000 MW (Cuadro 2), incrementándose significativamente en 2008 a pesar de la crisis económica. La clasificación mundial está encabezada por Estados Unidos (25.369

Cuadro 2
Potencia eólica instalada a escala mundial. 2008.

Miembros de la IEA Wind		Resto del Mundo	
País	MW	País	MW
Estados Unidos	25.369	China	12.200
Alemania	23.902	India	9.645
España	16.740	Francia	3.387
Italia	3.736	Nueva Zelanda	468
Reino Unido	3.331	Polonia	405
Dinamarca	3.163	Bélgica	384
Portugal	2.819	Turquía	383
Canadá	2.369	Egipto	365
Holanda	2.214	Brasil	336
Japón	1.880	Taiwan	224
Australia	1.306	Bulgaria	158
Suecia	1.047	Marruecos	134
Irlanda	1.002	República Checa	133
Austria	995	Hungría	127
Grecia	990	Ucrania	90
Noruega	430	Costa Rica	92
República de Corea	236	Estonia	78
Finlandia	143	Irán	67
México	85	Área Caribe	57
Suiza	14	Túnez	54
TOTAL	91.771	Lituania	52
		Luxemburgo	35
		Filipinas	33
		Argentina	30
		Letonia	27
		Islas del Pacífico	24
		Colombia	20
		Chile	20
		Uruguay	18
		Croacia	17
		Rusia	11
		Rumanía	10
		Isla Reunión (Francia)	10
		Otros (<10 MW)	38
		TOTAL	29.132
		TOTAL MUNDIAL	120.903

Fuente: IEA Wind Energy. Annual Report 2008.

MW), seguido de Alemania (23.902 MW) y España (16.740 MW), estando los demás países, excepción hecha de China, muy lejos de sus guarismos. En Estados Unidos la capacidad instalada en 2008 resulta suficiente como para proporcionar electricidad a siete millones de hogares, y se estima que dicha capacidad, a lo largo de su vida útil, evitará la emisión a la atmósfera de 44 millones de toneladas de CO₂. En España, la utilización de energía eólica ha reducido las emisiones de CO₂ en alrededor de dieciocho millones de toneladas sólo en 2008; además, según estimaciones de la IEA Wind Energy, ahorró seis millones de toneladas de combustibles convencionales y su oferta alcanzó el consumo eléctrico de más de diez millones de hogares.

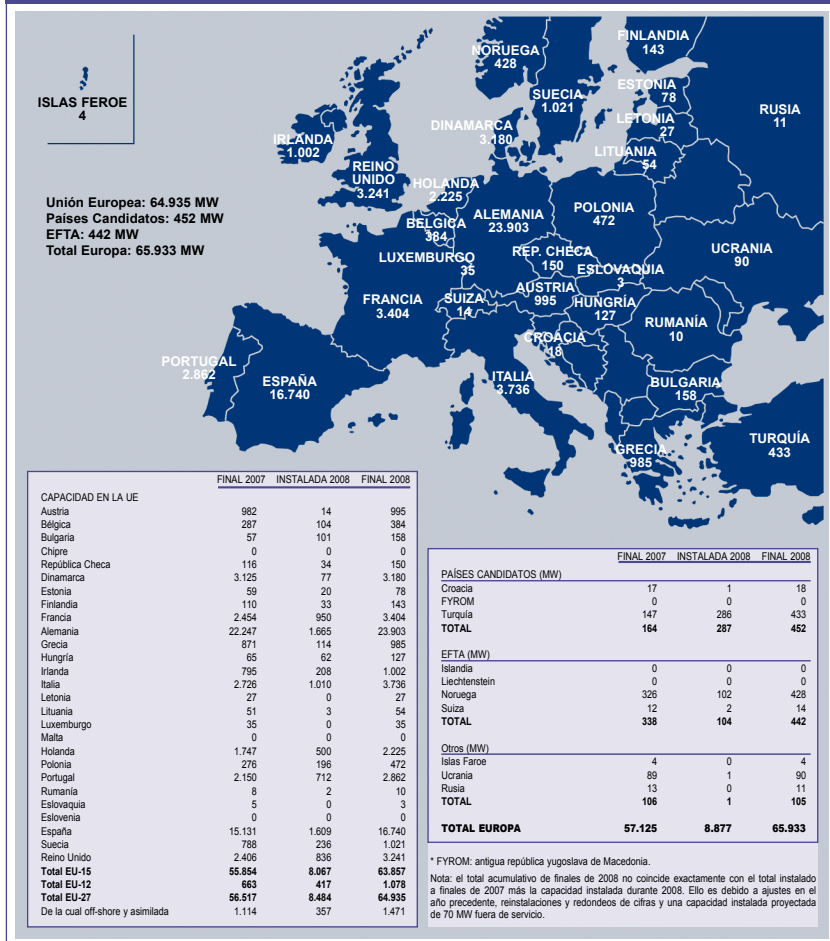
En Europa la capacidad eólica produjo en 2008 142TWh (4,2% de la demanda en un año promedio en lo que a viento se refiere) y evitó la emisión de 108 millones de toneladas de CO₂. En países como España, la energía eólica cubrió en varias ocasiones más del 40% de la demanda horaria y en varios días aportó más del 30% de la demanda diaria de electricidad. El Cuadro 3 ofrece información adicional, desagregada por países, y la Figura 1 muestra la potencia instalada, también por países.

Cuadro 3
Principales cifras de los países miembro de la IEA Wind para 2008.

Pais	Capacidad instalada total (MW)	Capacidad instalada off-shore (MW)	Incremento neto anual en la capacidad instalada (MW)	Número total de turbinas	Capacidad media de las nuevas turbinas	Electricidad generada por el viento (GWh/año)	Demanda nacional de electricidad (TWh/año)	Porcentaje de la demanda nacional de electricidad satisfecha por la energía eólica
Australia	1.306	0	482	756	2.000	3.462	267,0	1,3 %
Austria	995	0	14	618	2.000	2.050	70,7	2,9 %
Canadá	2.369	0	523	1.681	1.863	5.800	575,0	1,0 %
Dinamarca	3.163	423	39	5.101	2.000	6.975	36,2	19,3 %
Finlandia	143	13	33	118	3.000	260	87,0	0,3 %
Alemania	23.902	0	1.665	19.568	1.667	40.400	615,1	6,5 %
Grecia	990	0	115	1.190	1.650	2.300	51,0	3,7 %
Irlanda	1.002	25	207,7	834	1.696	2.298	26,2	8,8 %
Italia	3.736	0	1.010	3.588	1.566	6.637	337,6	1,9 %
Japón	1.880	11	342	1.508	1.247	2.856	913,2	0,3 %
Rep. Corea	236	0	43	152	1.579	421	422,0	0,1 %
México	85	0	0	104	-	254	209,7	0,1 %
Holanda	2.214	228	490	2.053	2.219	4.259	119,3	0,7 %
Portugal	2.819	0	694	1.500	1.900	5.737	50,6	11,3 %
España	16.740	0	1.609	>16.000	1.600	31.100	266,5	11,7 %
Suecia	1.047	133	216	1.151	1.700	1.974	145,9	1,4 %
Suiza	14	0	2,3	28	2.000	19	57,4	0,03 %
Reino Unido	3.331	598	912	1.952	2.060	5.274	406,0	1,3 %
Estados Unidos	25.369	0	8.558	>15.000	1.670	71.000	3.768,8	1,9 %
TOTALES	91.771	1.431	17.000	58.102	1.886	193.997	8.521	2,28 %

Fuente: Fuente: IEA Wind Energy. Annual Report 2008.
Nota: en negrita, cifras estimadas.

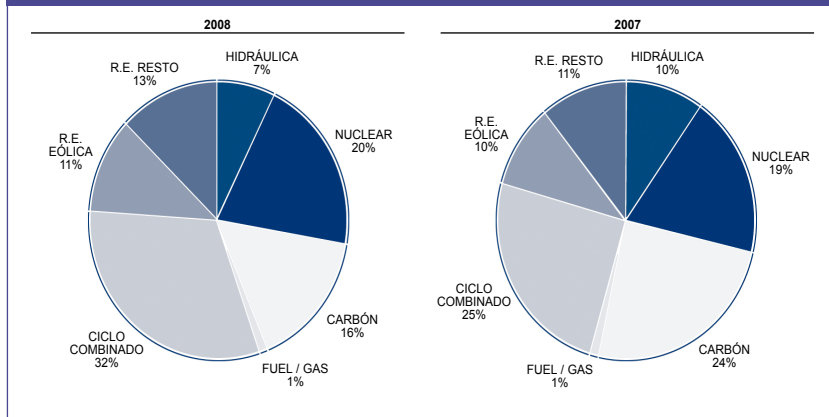
Figura 1
Potencia eólica instalada en Europa al término de 2008.



Fuente: EWEA.

Como se ha comentado anteriormente, España puede presumir de ser uno de los principales países del mundo en energía eólica, tanto en potencia instalada como en tecnología propia e investigación: concretamente el tercero. Para hacernos una idea de la importancia de la energía eólica en España, la potencia instalada en enero de 2009 era de 16.740 MW, la inversión en este concepto en 2008 alcanzó los 2.250 millones de euros, su aportación al PIB, directa e indirectamente, fue de 3.270 millones de euros (el 0,35 % del PIB de 2008). Y lo que es más importante en un país cuya rúbrica de exportaciones adolece de

Figura 2
Generación de electricidad en España, 2008.



Fuente: REE.
RE: Régimen especial.
Incluye, además de la demanda peninsular, el saldo exportador de intercambios internacionales y el consumo de bombeo.

un bajo nivel de bienes high-tech: la mitad del equipamiento producido fue exportado. El número de puestos de trabajo que genera superó los 40.000 en 2008. De este montante, 21.800 son puestos de trabajo directos en operaciones de funcionamiento y mantenimiento de parques eólicos, montaje e investigación y desarrollo. El número de puestos de trabajo indirectos (ligados básicamente al subsector de componentes) se estima en más de 17.000. De la apuesta española por la energía eólica da fe el hecho de que el objetivo recogido en el Plan de Energías Renovables 2005-2010 es de 20.155 MW, por lo que aún queda por realizar un importante desarrollo en términos de potencia instalada. La Figura 3 permite observar más en detalle la evolución de algunas de las rúbricas económicas comentadas. El Cuadro 4 y la Figura 4 ilustran la distribución regional de la potencia eólica instalada en España.

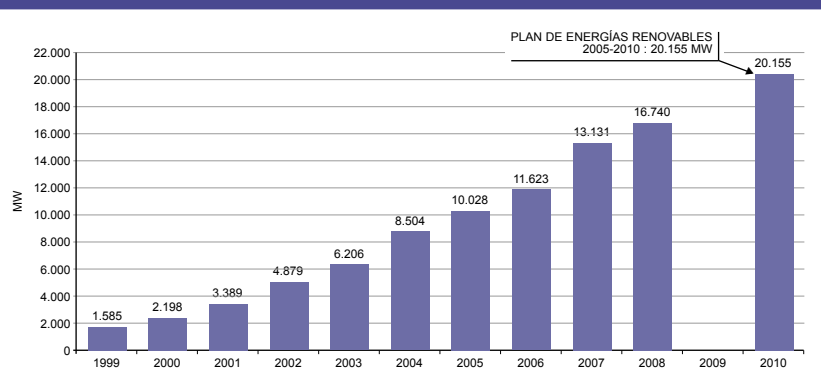
Pues bien, a pesar de la importancia y potencial de la energía eólica y del incremento constante, a pesar de la crisis económica, de la potencia eólica instalada, hay un aspecto al que, desde nuestro punto de vista, no se le presta la suficiente atención: el desarrollo de tecnología estadística destinada a la ubicación óptima de parques eólicos, interiores y off-shore, ya que la modelización del comportamiento del viento permitirá, con la misma capacidad instalada, una mayor generación eléctrica.

Figura 3 (a)
Puestos de trabajo generados por el sector eólico en España (estimación para 2010 y 2012).

	2008	2010	2012
Empleo directo	21.824	26.950	31.184
Empleo indirecto	17.307	21.371	24.728
Total empleo	39.131	48.321	55.912

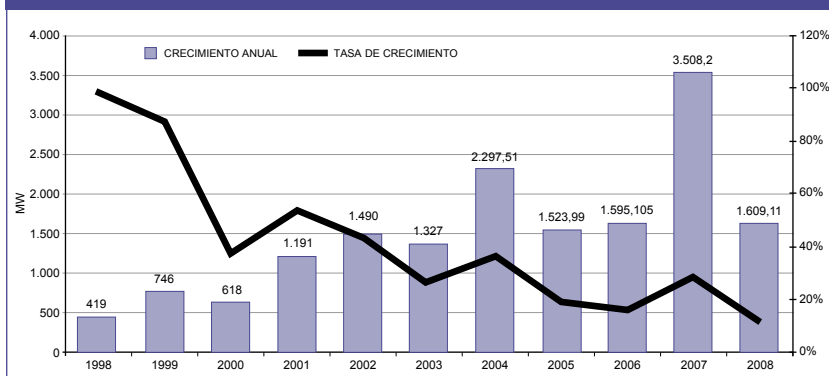
Fuente: AEE.

Figura 3(b)
Potencia eólica instalada y objetivo para 2010.



Fuente: IDAE, CNE, AEE.

Figura 3(c)
Crecimiento anual de la potencia instalada.



Fuente: AEE.

Cuadro 4 Potencia eólica instalada en España. Distribución por Comunidades Autónomas.

CC.AA.	Potencia instalada a 01/01/2009	Límites Estudios zonales (MW)	Puesta en servicio + autorizada CC.AA. (MW)	Planes Regionales (MW) (1)	Concursos en marcha
Andalucía	1.795	3.754	3.487	6.284	500
Aragón (2)	1.749	2.400	1.951	4.000	-
Asturias	304	918	819	1.100	-
Baleares (2)	4	50	210	210	-
Canarias (3)	134	344	440	1.025	440
Cantabria	18	400	32	300	1.100
Castilla-León	3.334	4.375	6.488	6.625	-
Castilla-La Mancha	3.416	3.990	3.324	4.100	-
Cataluña	420	1.460	1.248	3.500	-
Extremadura (2)	0	225	501	400	-
Galicia	3.145	3.438	2.950	6.500	2.325
Madrid (2)	0	50	0	200	-
Murcia	152	538	411	850	-
Navarra (2)	959	1.400	922	1.536	-
La Rioja (2)	447	500	448	665	-
Comunidad Valenciana (2)	710	1.600	2.300	3.500	250
País Vasco (2)	153	250	145	624	256
TOTAL	16.740	25.692	25.676	41.419	4.871

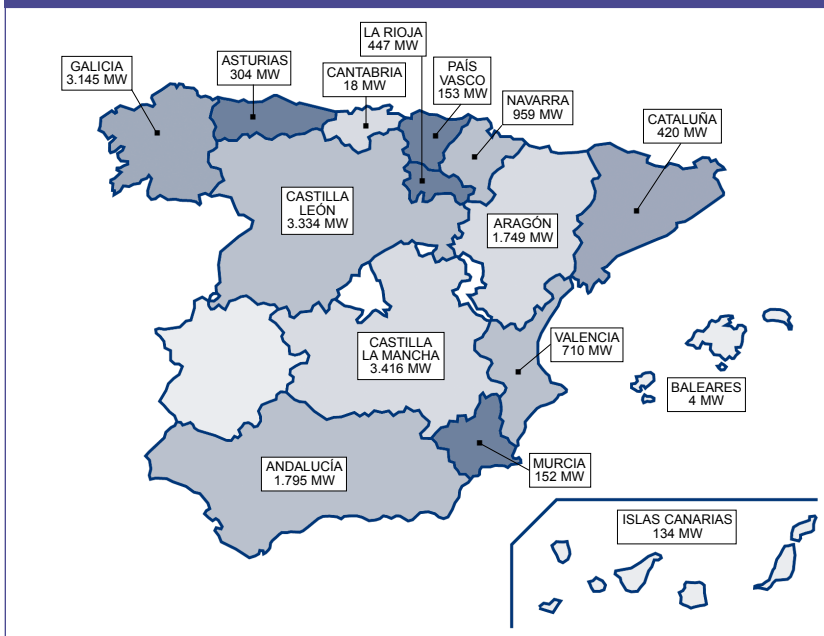
Fuente: AEE, Estudios zonales, Planes regionales.

(1) Potencia eólica instalada prevista por las CC.AA., cada comunidad tiene un objetivo temporal distinto.

(2) Al no disponer de estudios zonales, se aplica el criterio PER.

(3) Puesta en servicio + autorizada: concurso eólico de Canarias.

Figura 4 Distribución de la potencia eólica instalada en España. Enero 2009.



Fuente: AEE.

Por ello, en este artículo se abordarán los más recientes modelos de estimación de funciones de covarianza espacio-temporales susceptibles de utilización en la modelización de las dependencias espacio-temporales de la fuerza eólica. En otras palabras, ¿se pueden elaborar mapas fiables de fuerza eólica sobre toda un área (de mayores o menores dimensiones) sobre la base de unas pocas (cuantas más mejor, evidentemente) mediciones espacio-temporales? La respuesta es afirmativa. Y si ello es así, esta información resultará determinante a la hora de ubicar los futuros parques eólicos.

Dicho lo anterior, el artículo se estructura como sigue. Tras esta introducción, en la Sección 2 se llevará a cabo una breve revisión de los principales modelos de covarianza espacio-temporales susceptibles de utilización en la tarea anteriormente propuesta. En la Sección 3 se abordan los modelos covariográficos que no satisfacen la simetría completa. La Sección 4 se dedica a los modelos de covarianza espacio-temporales no estacionarios. La Sección 5 incluye la presentación de una nueva clase de modelos covariográficos espacio-temporales anisotrópicos; adicionalmente, se estudia un operador, la descente etendúe, que permite la preservación de las condiciones de anisotropía y no estacionariedad. Finalmente, se exponen las principales conclusiones de este trabajo y se propone una nueva línea de investigación en el marco de las energías renovables en general, y de la energía eólica en particular: una alternativa basada en la modelización de las dependencias espacio-temporales mediante modelos dinámicos, ya que éstos hacen uso de la estructura dinámica subyacente a muchos fenómenos reales.

2.- A la búsqueda de funciones de covarianza válidas.

La primera pregunta que hemos de responder a la hora de calificar una función de covarianza como válida es: ¿a qué nos referimos con el término "válida"? En el marco de la predicción krigada, el cálculo de la inversa de la matriz de covarianzas, necesaria para la obtención del mejor predictor lineal e insesgado, se convierte en un problema crucial en geoestadística. Y es que un

requisito indispensable para la inversión de la matriz de covarianzas es que sea definida positiva, por lo que el reto actual de la Geoestadística es la obtención de funciones de covarianza espacio-temporales válidas.

Y es un reto porque en la actualidad, a pesar de los esfuerzos realizados en los últimos años por ciertos grupos de investigadores, el elenco de modelos teóricos covariográficos o variográficos válidos que permitan la adecuada solución de los sistemas de ecuaciones de krigeado no es todo lo amplio que sería deseable. Por tanto, no resulta en absoluto extraño que la construcción de modelos covariográficos espacio-temporales (sobre todo no separables) sea una de las áreas de la Geoestadística a la que más interés está prestando en la actualidad la comunidad científica. Ahora bien, este “vino nuevo”, criado en la frontera de la Ciencia Geoestadística, procede de cepas viejas ya que, curiosamente, su materia prima deriva de teoremas datados en la primera mitad del siglo pasado. Los teoremas Bernstein (1928), Bochner (1932), Shoenberg (1938) y Lévy-Khinchine (1949) son algunos ejemplos representativos de estas viejas cepas que tan buen vino están dando en las últimas cosechas del campo de la Geoestadística.

Dicho lo anterior, a continuación se introducen una serie de conceptos básicos en el ámbito de la predicción krigeada espacio-temporal.

Sea un conjunto de duplas espacio-temporales denotadas por $Z(\mathbf{s}, t)_i$, $i=1,2,\dots,n$. Sea $Z(\mathbf{s}, t)$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$ una función aleatoria espacio-temporal Gaussiana con media $\mu(\mathbf{s}, t)$ y varianza constante y finita. Entonces, la función

$$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t_1, t_2) \rightarrow C_{st}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t_1, t_2)$$

definida en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se denomina *función de covarianza espacio-temporal* de la función aleatoria en cuestión y, si no se consideran nuevas hipótesis, depende únicamente de las coordenadas espacio-temporales $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t_1, t_2)$.

Es de sobra conocido que el requisito más importante para que una función C_{st} definida en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sea función de covarianza asociada a un campo aleatorio espacio-temporal, es que sea definida positiva, esto es

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j C_{st}((\mathbf{s}_i, t_i), (\mathbf{s}_j, t_j)) \geq 0$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, y para cualesquiera $(\mathbf{s}_i, t_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ y $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$.

Bajo la suposición *estacionariedad de segundo orden*, se tiene que $\mu(\mathbf{s}, t) = \mu$, independientemente de las coordenadas espacio-temporales, y la función de covarianza

$$\text{cov}(Z(\mathbf{s}_i, t_i), Z(\mathbf{s}_j, t_j)) = C_{st}(\mathbf{h}, u)$$

queda definida para $(\mathbf{h}, u) = (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j, t_i - t_j) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Por lo tanto, únicamente depende de la separación espacial y temporal, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ y $u \in \mathbb{R}$ respectivamente.

La estacionariedad es sólo una de las hipótesis de simplificación que a menudo es necesaria para la estimación y modelización.

Una función de covarianza estacionaria es *separable* (Mitchell et al, 2005) si se puede expresar como:

$$C_{st}(\mathbf{h}, u) = \frac{C_{st}(\mathbf{h}, 0) C_{st}(0, u)}{C_{st}(0, 0)}, \forall (\mathbf{h}, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$$

En otras palabras, separabilidad significa que la estructura de covarianza espacio-temporal se puede descomponer en una función de covarianza puramente espacial C_s y otra función de covarianza puramente temporal C_t . Se dirá que no es separable en caso contrario.

Una función de covarianza estacionaria se denomina *completamente simétrica* si es espacialmente isotrópica y temporalmente simétrica, es decir, si

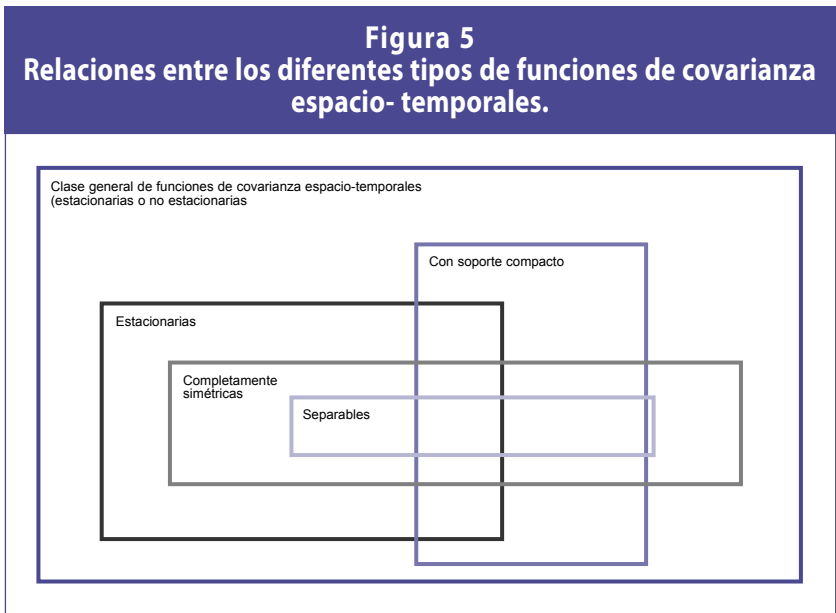
$$C_{st}(\mathbf{h}, u) = \tilde{C}_{st}(\|\mathbf{h}\|, |u|),$$

con $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}$, y donde el símbolo $\|\cdot\|$ denota la norma Euclídea. Finalmente, \tilde{C}_{st} es una función definida positiva y representa a C_{st} . En este caso, siguiendo a Gneiting (2002), se tiene que:

$$C_{st}(\mathbf{h}, u) = C_{st}(\mathbf{h}, -u) = C_{st}(-\mathbf{h}, u) = C_{st}(-\mathbf{h}, -u) .$$

Si una función de covarianza es separable entonces es completamente simétrica. El recíproco no es necesariamente cierto.

Una vez visto cuándo una función de covarianza espacio-temporal es definida positiva y cuándo es o no separable, se ha de poner de manifiesto que los primeros esfuerzos de investigación en este ámbito se dedicaron al establecimiento de funciones de covarianza separables, las cuales son de fácil implementación pero, sin embargo, no tienen en cuenta la interacción entre el espacio y el tiempo, siendo ésta su principal limitación (véase Figura 5). Esta limitación llevó a dirigir todos los esfuerzos de investigación hacia el campo de la no separabilidad (aún en el ámbito de isotropía y estacionariedad). Entre estos últimos destacan los trabajos desarrollados por Jones y Zhang (1997), Cressie y Huang (1999), Brown *et al.* (2000), De Cesare *et al.* (2001a,b, 2002), De Iaco *et al.*



Fuente: (Gneiting *et al.*, 2005).

(2001, 2002a,b, 2003), Myers *et al.* (2002), Gneiting (2002), Ma (2002, 2003a,b, 2005a,b,c), Fernández-Casal *et al.* (2003) o Kolovos *et al.* (2004), Stein (2005), entre otros.

Sin embargo, todo este esfuerzo de investigación ha sido llevado a cabo en el ámbito de los modelos isotrópicos, es decir, aquellos en los que la dirección no importa. Ahora bien, la estructura de las dependencias estadísticas puede ser distinta dependiendo de la dirección; de hecho así ocurre en muchos casos, entre ellos en la modelización de la fuerza del viento, íntimamente relacionada con la producción de energía eólica. Es por ello que la consideración de las situaciones de no estacionariedad y/o anisotropía son cuestiones relacionadas íntimamente con la energía eólica.

El desarrollo evolutivo continuó con la búsqueda de modelos espacio-temporales no separables espacialmente anisotrópicos y/o temporalmente asimétricos, como los descritos en Fernández-Casal *et al.* (2003), Porcu *et al.* (2006) o Mateu *et al.* (2007a,b), entre otros. Finalmente, se pueden citar algunas aproximaciones recientes al problema de la modelización de funciones de covarianza no estacionarias, como las realizadas en Ma (2002, 2003c), Fuentes *et al.* (2005), Stein (2005), Chen *et al.* (2006), Porcu *et al.* (2006a,b, 2007, 2008), Mateu *et al.* (2007a,b) o Porcu y Mateu (2007), Gregori *et al.* (2008), Martínez *et al.* (2008), Porcu *et al.* (2009a,b,c).

En estos últimos campos han sido de gran utilidad las mixturas de covariogramas, la construcción de funciones de covarianza a través de cópulas y funciones completamente monótonas, el uso de las transformadas de Fourier, la combinación de funciones completamente monótonas y funciones de Bernstein, las mixturas de potencias positivas, los procedimientos que operan en el dominio espectral y que permiten generar funciones de covarianza espacio-temporales, etc., etc.

Dicho esto, y volviendo a la problemática intrínseca de la modelización del viento y de la energía eólica, la estructura de las dependencias estadísticas puede ser distinta dependiendo de la dirección. Igualmente, la suposición de simetría temporal podría ser harto discutible en el marco de la energía eólica. No menos discutible, por irrealista, es la restricción de la modelización de las dependencias espacio-temporales de la fuerza del viento al terreno de la estacionariedad (la co-variación de la fuerza del viento en dos

estaciones de seguimiento únicamente depende de la distancia que las separa). Es por ello que en los siguientes epígrafes se proponen modelos que consideran la anisotropía en la componente espacial, la asimetría en la componente temporal y la no estacionariedad (la ubicación de las estaciones de medición importa a la hora de computar la covarianza entre las variables medidas en ellas), y que son susceptibles de utilización en aquellas cuestiones relacionadas con la energía eólica.

Antes de pasar al epígrafe 3, creemos importante poner de manifiesto que se han omitido las demostraciones de las propuestas que se exponen a continuación. Y ello por dos motivos: el primero por ser excesivamente complejas para un lector no habituado con el instrumental matemático-estadístico que utiliza la Geoestadística espacio-temporal; el segundo, porque podría desviar la atención del lector sobre el principal objetivo de este artículo: mostrar un amplio abanico de modelos de covarianza espacio-temporales que superan la isotropía y la no estacionariedad, lo cual supone un paso al frente en el marco de la modelización de dependencias espacio-temporales en el campo de la generación de energía eólica. Remitimos, pues, al lector a la bibliografía citada al final del artículo en lo que a demostraciones se refiere.

3.- Modelos covariográficos que no satisfacen la simetría completa.

Existen determinados procesos espacio-temporales que, por su propia naturaleza, no son completamente simétricos. Por ejemplo, pueden existir determinadas direcciones espaciales donde el proceso se manifieste de forma diferente que en el resto (tal es el caso, por el efecto de vientos predominantes, corrientes oceánicas, etc.). Por consiguiente, las funciones de covarianza completamente simétricas no permitirán la modelización de estas situaciones.

En la literatura se pueden encontrar diferentes funciones de covarianza espacio-temporales estacionarias que no son completamente simétricas obtenidas a través de ecuaciones de difusión o de ecuaciones estocásticas de derivadas parciales.

No obstante, una manera muy útil de abordar el problema planteado es generar funciones de covarianza definidas mediante la sencilla forma:

$$C_{st}(\mathbf{h}, u) = E_v [C_{st}(\mathbf{h} + v u)]$$

donde \mathbf{v} es un vector de velocidad aleatorio y una función de covarianza espacial estacionaria.

Para la especificación de \mathbf{v} existen diferentes posibilidades desde el punto de vista físico. Así, lo más sencillo es tomar \mathbf{v} como el vector medio de los valores observados. También resulta sencillo asignar al vector aleatorio \mathbf{v} una distribución empírica de vectores de velocidad que se puede obtener, por ejemplo, a partir de un histórico de observaciones. Finalmente, también puede actualizarse la distribución de \mathbf{v} de forma dinámica, según el estado actual del fenómeno que se está estudiando.

4.- Nuevas familias de covarianza no estacionarias.

Igual que en el caso de simetría completa, la adopción de la hipótesis de estacionariedad no es realista en la modelización de determinados fenómenos naturales, entre ellos la modelización de la fuerza del viento, tan relevante en el marco de la generación de energía eólica. Sin embargo, en numerosas ocasiones se ha abusado del supuesto de estacionariedad debido a que la literatura referida a modelos no estacionarios es mucho menos voluminosa, y de más sencillo tratamiento, que su homónima estacionaria, si bien, afortunadamente, en los últimos años ha experimentado un notable desarrollo.

En este epígrafe se resumen algunas de las principales estrategias utilizadas en la literatura para la construcción de funciones de covarianza no estacionarias. En concreto, se analizará la generalización al caso espacio-temporal del procedimiento de construcción de funciones espaciales no estacionarias propuesto por Fuentes y Smith (2001); en dicho procedimiento se utilizan funciones de covarianza con estructura de sumas ponderadas de covarianzas localmente estacionarias. También se analizarán los

modelos no estacionarios propuestos en (Ma, 2002, 2003c). Posteriormente, se describirán las interesantes funciones de covarianza no estacionarias propuestas por Porcu y Mateu (2007), tanto en el ámbito de la utilización de funciones completamente monótonas como en el de las construcciones espacio-temporales basadas en medias cuasi-aritméticas de funciones de covarianza. Y finalmente, se abordarán los modelos estacionarios en el tiempo pero no en el dominio espacial.

4.1 *Mixturas de procesos localmente estacionarios.*

Chen *et al.* (2006) proponen una generalización espacio-temporal del procedimiento de construcción de funciones de covarianza espaciales no estacionarias a través de mixturas de procesos estacionarios localmente ortogonales (Fuentes y Smith, 2001; Fuentes, 2002). El procedimiento es como sigue.

Sea $Z(\mathbf{s}, t)$ una función aleatoria espacio-temporal no estacionaria de media cero, con $(\mathbf{s}, t) \in D \times T$, tal que $D \subseteq \mathbb{R}^d$ y $T \subseteq \mathbb{R}$. El procedimiento de construcción de funciones de covarianza espacio-temporales no estacionarias propuesto por Chen *et al.* consiste en expresar el proceso $Z(\mathbf{s}, t)$ como una mixtura de procesos espacio-temporales localmente estacionarios y ortogonales:

$$Z(\mathbf{s}, t) = \sum_{i=1}^k K(\mathbf{s} - \mathbf{s}_i, t - t_i) Z_i(\mathbf{s}, t)$$

donde \mathbf{s}_i es el centroide de cada una de las regiones S_i en las que se ha dividido el dominio espacio temporal de interés, $D \times T$, $Z_i(\mathbf{s}, t)$ es una función aleatoria espacio-temporal localmente estacionaria en S_i que da cuenta de la estructura espacio-temporal del proceso general en dicha región, y $K(\mathbf{s} - \mathbf{s}_i, t - t_i)$ es una función de ponderación que favorece las distancias, tanto espaciales como temporales, de pequeña magnitud.

La particularización al caso de procesos espacio-temporales estacionarios en el tiempo pero no en el espacio, o estacionarios en el espacio pero no en el tiempo resulta inmediata.

4.2. *Mixturas escalares y de potencias positivas de funciones de covarianza separables.*

Las mixturas escalares y de potencias positivas de funciones de covarianza fueron propuestas por Ma (2002) como respuesta al problema de la separabilidad, si bien se pueden aplicar tanto a contextos continuos como discretos y no requieren que el proceso sea estacionario en el espacio o estacionario en el tiempo,

También se abordará la generación de funciones de covarianza y semivariogramas espacio-temporales no estacionarias mediante combinaciones lineales de funciones de covarianza espacio-temporales estacionarias y variogramas intrínsecamente estacionarios Ma (2003c).

Mixturas escalares

Sea $C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ una función de covarianza espacial sobre \mathbb{R}^d y $C_t(t_1, t_2)$ una función de covarianza temporal sobre T , por lo cual $C_s(a\mathbf{s}_1, a\mathbf{s}_2)$ y $C_t(bt_1, bt_2)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in T$, son, respectivamente, funciones de covarianza permisibles en \mathbb{R}^d y T .

Por consiguiente, la función generada por:

$$C((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \int_{\mathbb{R} \times T} C_s(a\mathbf{s}_1, a\mathbf{s}_2) C_t(bt_1, bt_2) d\mu(a, b)$$

es una función de covarianza espacio-temporal estacionaria sobre $\mathbb{R}^d \times T$, donde $\mu(a, b)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R} \times T$.

Mixturas de potencias positivas

En el caso en que se consideren funciones de covarianza espaciales y temporales no estacionarias y acotadas pueden generarse nuevas funciones de covarianza espacio-temporales no estacionarias mediante la denominada "mixtura de potencias positivas".

Una primera cuestión que hay que aclarar es qué se entiende por funciones de covarianza espaciales y temporales acotadas. Pues bien, por este último término se entiende que:

$$\begin{aligned} |C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)| &< C_s \\ |C_t(t_1, t_2)| &< C_t \end{aligned}$$

En este caso las funciones del tipo:

$$\rho((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_s^i(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \rho_t^j(t_1, t_2) p_{ij}$$

es decir,

$$\rho((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}{C_s} \right)^i \left(\frac{C_t(t_1, t_2)}{C_t} \right)^j \rho_{ij}$$

o cuando la distribución de probabilidad discreta $p_{ij}(i, j) \in \mathbb{N}_+^2$ tiene toda su masa confinada en la recta $i = j$:

$$\rho((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) C_t(t_1, t_2)}{C_s C_t} \right)^k \rho_k$$

serán funciones de correlación espacio-temporales sobre $\mathbb{R}^d \times T$, siendo, i, j y k constantes positivas y $p_{ij}(i, j) \in \mathbb{N}$ y $p_k(k) \in \mathbb{N}$ distribuciones de probabilidad.

Es necesario incidir en que las expresiones anteriores sólo son aplicables si C_s y C_t están acotadas, puesto que, como es sabido, $g(\exp(t)) = E \left[(\exp(t))^u \right]$ es absolutamente convergente en $[-1; 1]$ y $g(\exp(t+s)) = E \left[(\exp(t))^u (\exp(t))^v \right]$ y en el rectángulo unidad $[-1, 1]^2$.

Combinaciones lineales de funciones de covarianza y variogramas

Otra interesante vía de construcción de funciones de covarianza espacio-temporales no estacionarias fue aportada por Ma (2003), quien sugirió, a tales efectos, la combinación de funciones de covarianza y semivariogramas estacionarios.

En este sentido, si $\gamma(\mathbf{s}, t)$ es un semivariograma estacionario sobre $\mathbb{R}^d \times T$, entonces la función

$$\varpi((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \gamma(\mathbf{s}_1, t_1) + \gamma(\mathbf{s}_2, t_2) - \gamma((\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2, t_1 - t_2))$$

resulta una función de covarianza no estacionaria sobre $\mathbb{R}^d \times T$.

Otros argumentos que dan lugar a funciones de covarianza no estacionarias sobre $\mathbb{R}^d \times T$ son los siguientes:

$$\phi((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = 2(\gamma(\mathbf{s}_1, t_1) + \gamma(\mathbf{s}_2, t_2)) - \gamma(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, t_1 + t_2) - \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2, t_1 - t_2)$$

y

$$\kappa((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \gamma(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, t_1 + t_2) - \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2, t_1 - t_2)$$

que verifican la relación:

$$\varpi((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \frac{1}{2} \phi((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) + \frac{1}{2} \kappa((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2))$$

4.3. Generación de funciones de covarianza espacio-temporales no estacionarias a través de funciones completamente monótonas.

Finalmente, se mostrará un procedimiento de generación de funciones no estacionarias, ideado por Porcu y Mateu (2007), mediante la utilización de funciones completamente monótonas.

En particular, sea $\gamma(\mathbf{s}, t)$ un semivariograma intrínsecamente estacionario con $\gamma(\mathbf{0}, 0) = 0$, y sea $\varphi(t), t > 0$ una función completamente monótona con $\varphi(0) = 1$. Entonces, la función:

$$C((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \varphi(\psi(\mathbf{s}_1, t_1, \mathbf{s}_2, t_2))$$

con:

$$\psi(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t_1, t_2) = \frac{1}{2} (\gamma(2\mathbf{s}_1, 2t_1) + \gamma(2\mathbf{s}_2, 2t_2)) - \gamma(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, t_1 + t_2) - \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2, t_1 - t_2)$$

$$\psi(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t_1, t_2) = 1 + \frac{1}{2} (\gamma(2\mathbf{s}_1, 2t_1) + \gamma(2\mathbf{s}_2, 2t_2)) - \left(\frac{1 + \gamma(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, t_1 + t_2)}{1 + \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2, t_1 - t_2)} \right)$$

es una función de covarianza no estacionaria válida sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

También es fácil comprobar que las funciones

$$C((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \varphi \left(\frac{\psi(\mathbf{s}_1, t_1, \mathbf{s}_2, t_2)}{1 + \psi(\mathbf{s}_1, t_1, \mathbf{s}_2, t_2)} \right)$$

$$C((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \varphi \left(1 - \frac{1 - \psi(\mathbf{s}_1, t_1, \mathbf{s}_2, t_2)}{1 + \psi(\mathbf{s}_1, t_1, \mathbf{s}_2, t_2)} \right)$$

$$C((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) = \varphi \left((1 + \psi(\mathbf{s}_1, t_1, \mathbf{s}_2, t_2))^\rho - 1 \right)$$

con $\rho \in [0, 1]$, generan funciones de covarianza no estacionarias válidas sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

4.4. Construcciones cuasi-aritméticas y no estacionariedad en el espacio.

Como es sabido, el interés en las medias cuasi-aritméticas no es nuevo. Han sido bien entendidas como mínimo desde 1930 y un gran número de investigadores han estudiado sus ampliamente características y propiedades. En particular, Kolmogorov (1930) y Nagumo (1930) proporcionan, independientemente el uno del otro, condiciones necesarias y suficientes para cuasi-aritmeticidad de las medias, esto es, para la existencia de una función continua estrictamente monótona f tal que, para (x_1, \dots, x_n) en el mismo intervalo real, la función

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow M_n(x_1, \dots, x_n) = f^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right)$$

es una media.

Pues bien, dicho lo anterior, la guinda a este epígrafe dedicado al tratamiento y generación de funciones de covarianza espacio-temporales no estacionarias o anisotrópicas la ponen Porcu, Mateu y Christakos (2009) con sus recientes desarrollos en el estudio de la dependencia espacio-temporal a través de promedios cuasiaritméticos. Tal y como señalan estos tres autores, la teoría de las medias cuasi-aritméticas constituye una poderosa herramienta en el estudio de las funciones de covarianza en el dominio espacio-temporal. En concreto, utilizan funcionales cuasi-aritméticos para hacer inferencias sobre la permisibilidad de funciones que, en general, no son funciones de covarianza permisibles. Este es el caso, por ejemplo, de dos promedios ciertamente populares, como son la media geométrica y la media armónica, promedios para los cuales proporcionan criterios de permisibilidad.

Además de lo anterior, en Porcu *et al.* (2009), a través de su particular enfoque, se obtienen algunas desigualdades importantes que involucran funciones de covarianza, así como relaciones de preferencia y propiedades algebraicas. En particular, las covarianzas cuasi-aritméticas permiten ordenar y establecer relaciones de preferencia, desigualdades tipo Jensen y para los elementos mínimo y máximo de su clase. Además, se discute la representación y propiedades de alisado de un campo aleatorio débilmente estacionario con función de covarianza cuasi-aritmética, se muestra que el generador de las medias cuasi-aritméticas

puede utilizarse como función vínculo para construir estructuras espacio-temporales no separables a partir de funciones marginales espaciales y temporales, procedimiento conocido para quienes ya han trabajado con cópulas. Finalmente, se utilizan funciones cuasi-aritméticas para generalizar los resultados ya existentes relativos a la construcción de funciones de covarianza espaciales no estacionarias y discuten la aplicación y los límites de dicha generalización.

Precisamente este último es el punto donde queremos incidir, puesto que los conocidos enfoques de Stein (2005) como de Paciorek y Schervish (2006) admiten una extensión natural a través del uso de funciones cuasi-aritméticas.

El principal resultado que se obtiene en Porcu *et al.* (2009) es el siguiente: Sea Σ un mapeo de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ a matrices positivas definidas positivas $p \times p$, F una medida no negativa en \mathbb{R}_+ , φ_1, φ_2 funciones completamente monótonas, y g una función no negativa tal que, para un \mathbf{s} dado, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^p$, $h_s = \varphi_2^{-1} \circ g(\cdot, \mathbf{s}) \in L^1(F)$. Sean también $\Sigma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{1}{2} (\Sigma(\mathbf{s}_1) + \Sigma(\mathbf{s}_2))$ y $Q(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)' \Sigma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$. Entonces:

$$C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{|\Sigma(\mathbf{s}_1)|^{1/4} |\Sigma(\mathbf{s}_2)|^{1/4}}{|\Sigma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)|^{1/2}} \int_0^\infty \varphi_1(Q(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \tau) Q_{\psi_2}(g_{s_1}, g_{s_1})(\tau) dF(\tau)$$

es una función de covarianza no estacionaria en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

No obstante, se ha de poner de manifiesto que es difícil obtener una forma cerrada de la expresión anterior, salvo que se haga $\psi_2 := G$. Algunas formas cerradas obtenidas haciendo $\psi_2 := G$ son las siguientes:

Forma 1: Sean $dF(\tau) = d\tau$ y $\varphi_1(\tau) = \tau^{\lambda-1}$, que es una función completamente monótona para $\lambda \in (0, 1)$, $g(\tau, \alpha, \nu) = (1 + \alpha(\mathbf{s}_1)\tau)^{-\nu(\mathbf{s}_1)}$, donde α y ν son funciones estrictamente positivas de $\mathbf{s}_i, i=1, 2$, y,

además, $0 < \alpha(\mathbf{s}_i) < \pi$. Tomando $k = \frac{|\Sigma(\mathbf{s}_1)|^{1/4} |\Sigma(\mathbf{s}_2)|^{1/4}}{|\Sigma(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)|^{1/2}} Q = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)^{\lambda-1}$ y

utilizando [3,259,3] de Gradshteyn y Ryzhik (1980) se obtiene la siguiente función de covarianza:

$$C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = k \alpha(\mathbf{s}_1)^\lambda B(\lambda, \nu(\mathbf{s}_1) + \nu(\mathbf{s}_2) - \lambda)_2 F_1\left(\nu(\mathbf{s}_2), \lambda; \nu(\mathbf{s}_1) + \nu(\mathbf{s}_2); 1 - \frac{\alpha(\mathbf{s}_2)}{\alpha(\mathbf{s}_1)}\right)$$

donde $B(\cdot, \cdot)$ es la distribución Beta y ${}_2F_1(\cdot, \cdot, \cdot)$ es la función hipergeométrica de Gauss.

Forma 2: Considérense $dF(\tau) = e^{-\tau} d\tau$, $\varphi_1(\tau) = \tau^{v-1}$, con $v \in (0, 1)$, $g(\tau, \mathbf{s}_i) = \exp\left(-\frac{\alpha(\mathbf{s}_i)}{2}\tau\right)$ donde α es una función estrictamente positiva de $\mathbf{s}_i, i = 2, 3$. Entonces, utilizando [3,478,4] de Gradshteyn y Ryzhik (1980) se obtiene la siguiente función de covarianza válida para el modelado de la anisotropía geométrica local y que presenta la particularidad de que tiene un parámetro de alisado fijo:

$$C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = 2k \left(\frac{\alpha(\mathbf{s}_1) + \alpha(\mathbf{s}_2)}{2}\right)^{\frac{v}{2}} K_v \left[2 \left(\frac{\alpha(\mathbf{s}_1) + \alpha(\mathbf{s}_2)}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

4.5. Modelos temporalmente estacionarios y espacialmente no estacionarios.

Como ya puso de manifiesto Whittle (1954), la construcción de un proceso no estacionario puede llevarse a cabo desde tres perspectivas diferentes:

- a) Una representación apropiada del proceso subyacente.
- b) La construcción directa de funciones de covarianza no estacionarias.
- c) La especificación de algunas clases de espectros evolutivos.

En este trabajo nos centraremos en la opción b), si bien poniéndola en práctica en el contexto espacio-temporal.

Tomemos como punto de partida la clase de Gneiting (2002), la cual admite la representación:

$$C_{st}(\mathbf{h}, u) = \frac{\sigma^2}{(\psi(|u|^2))^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{\|\mathbf{h}\|^2}{\psi(|u|^2)} \right) \quad (3)$$

donde d determina la dimensión del dominio espacial.

Dicho lo anterior, y en aras de la claridad, se denotará una función de covarianza no estacionaria en el espacio pero sí en el tiempo como $C_{st}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, u)$, donde \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 son dos localizaciones y u un

retardo temporal. Además, se define una función con valores reales, $g:D(\mu)\rightarrow\mathbb{R}$, tal que $g(t)=\int_0^\infty (1-e^{-\lambda t})d\mu(\lambda)$, donde μ es una medida acotada y no negativa. Finalmente, sea $K:\mathbb{R}^d\rightarrow\mathbb{R}$ un kernel no estacionario definido negativo, tal y como se describe en Berg y Foster (1975). Entonces se tiene que:

$$C_{st}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, u) = \left(g(K(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2))\right)^{-1/2} \varphi\left(\frac{|u|}{g(K(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2))}\right)$$

es una función de covarianza en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ siempre y cuando $g \circ K$ no se anule en cero.

La ventaja fundamental del resultado anterior es que permite la construcción de formas cerradas de covarianza a través de un procedimiento muy simple. Quizás el paso más difícil lo constituya la determinación de kernels espaciales no estacionarios, por lo que, a continuación, se indican tres posibilidades muy útiles:

1. $K(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{1}{2} \{ \psi(2\mathbf{s}_1) + \psi(2\mathbf{s}_2) \} - \{ \psi(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) + \psi(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \}$
2. $K(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = 1 + \frac{1}{2} \{ \psi(2\mathbf{s}_1) + \psi(2\mathbf{s}_2) \} - \left\{ \frac{1 + \psi(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)}{1 - \psi(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)} \right\}$
3. $K(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{1}{2} \{ C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1) + C_s(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2) \} - C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$

donde ψ es una función definida negativa (por ejemplo, un semivariograma paramétrico).

Finalmente, como se verá más adelante, la clase de Bernstein también puede ser utilizada tanto para modelos geoméricamente anisotrópicos como zonalmente anisotrópicos. La anisotropía zonal se ha modelizado tradicionalmente mediante el modelo suma (Rouhani and Hall, 1989), cuya construcción es muy simple y fácil de implementar, pero considera separadamente la dependencia en diferentes direcciones. Además, esta construcción está basada en semivariogramas y no en covariogramas. Dimitrakopoulos y Lou (1994) proponen algunos modelos para anisotropía geométrica. Fernández-Casal *et al.* (2003) también proponen modelos anisotrópicos, pero no pueden obtenerse en forma cerrada sino que únicamente pueden ser calculados numéricamente. Por tanto, la clase de Bernstein puede aportar alguna luz en esta dirección. De hecho, mediante procedimientos muy directos se pueden obtener formas cerradas muy simples.

5.- Nuevas familias de covarianza anisotrópicas. Modelo anisotrópico en la componente espacial: clase de Bernstein.

Dado que, como se ha comentado anteriormente, el supuesto de isotropía es, muy a menudo, irrealista para modelizar los fenómenos de la realidad relacionada con la producción de energía eólica, en este epígrafe se relaja dicha hipótesis y se definen nuevos modelos de covarianza que incorporen un comportamiento anisotrópico en la componente espacial.

Permítasenos recordar que puede haber dos tipos de anisotropía. La más simple, denominada geométrica, surge cuando la función de covarianza, que representa la estructura de las dependencias espaciales objeto de medición, y su meseta es la misma independientemente de la dirección, pero el alcance de la dependencia espacial cambia con la misma. En la segunda, anisotropía zonal, la forma de la estructura de la dependencia espacial y la meseta de la misma, o el alcance, o ambas, varían con la dirección considerada. La solución al primer tipo de anisotropía es sencilla: basta con llevar a cabo una deformación de las coordenadas que nos permita utilizar un modelo de covarianza isotrópico. El caso de la anisotropía zonal presenta, sin embargo, una mayor complicación.

Dicho lo anterior, considérense los procesos aleatorios Gaussianos débilmente estacionarios y mutuamente independientes $Z_i(x), i=1, \dots, d+1, d \in \mathbb{Z}_+$, definidos en la recta real. Considérese que los d primeros procesos están indexados al espacio y el $d+1$ -ésimo al tiempo. Ahora supóngase un vector aleatorio no negativo, también $d+1$ -dimensional, $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_d)'$ tal que W_i es independiente de Z_i . Sean C_{s_i} y C_t las funciones de covarianza asociadas con $Z_i, i=1, \dots, d$ y Z_{d+1} , respectivamente. Se asume que dichas funciones son estacionarias, simétricas y del tipo:

$$C_{s_i}(h_i) = e^{-\psi_i(|h_i|)} \quad i=1, \dots, d$$

$$C_t(u) = e^{-\psi_t(|u|)}$$

siendo ψ_i y ψ_t funciones de Bernstein, por lo cual el Teorema de Schoenberg garantiza que estas construcciones son definidas positivas.

Dicho lo anterior, nuestro interés se centra en inspeccionar las propiedades de los siguientes campos aleatorios espacio-temporales estacionarios basados en mixturas de escala y definidos sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$:

$$Z(\mathbf{s}, t) = Z_{d+1}(tW_{t+1}) \prod_{i=1}^d Z_i(s_i, W_i)$$

siendo $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)' \in \mathbb{R}^d$ y $t \in \mathbb{R}$.

Obviamente, la estructura de covarianza asociada a dicho campo aleatorio es no separable y de la forma:

$$C_{st}(\mathbf{h}, \mathbf{u}) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^d \psi_i(|h_i|)\omega_i - \psi_t(|u|)\omega_{d+1}} dF(\boldsymbol{\omega})$$

con $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d)' \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{d+1})'$. Si $F(\boldsymbol{\omega})$ es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, entonces:

$$C_{st}(\mathbf{h}, \mathbf{u}) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^d \psi_i(|h_i|)\omega_i - \psi_t(|u|)\omega_{d+1}} f(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}$$

Nótese que si, y sólo si, la función de densidad $d+1$ -dimensional se puede expresar como el producto de $d+1$ funciones de densidad marginales, la construcción anterior será separable.

Teniendo como base la construcción anterior, sea \mathcal{L} la transformada bivalente de Laplace de un vector aleatorio no negativo (W_1, W_2) . Sean ψ_i , $i=1, \dots, d$ y ψ_t bien funciones positivas de Bernstein o funciones continuas, crecientes y cóncavas, también sobre la parte positiva de la recta real. Entonces

$$C_{st}(\mathbf{h}, \mathbf{u}) = \mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^d \psi_i(|h_i|), \psi_t(|u|) \right) \tag{1}$$

es una función de covarianza espacio-temporal no separable y estacionaria en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

Es fácil notar que la construcción (1) no es sino un caso particular de la clase de funciones de covarianza introducida por Ma (2003) que, sin embargo, goza de la característica inicial de que

su condición de permisividad es mucho menos restrictiva (obviamente, es mucho más sencillo comprobar si una función es continua, creciente y cóncava en la vertiente positiva de la recta real que comprobar que es condicionalmente definida negativa en \mathbb{R}^d). Pues bien, a la subclase obtenida la denominaremos clase de Bernstein.

Otra de las características relevantes de la clase de Bernstein es su utilidad para el tratamiento tanto de anisotropía geométrica como anisotropía zonal. La anisotropía zonal, de complicado tratamiento, como ya se avanzó anteriormente, se ha modelado tradicionalmente mediante modelos suma, que si bien resultan de fácil implementación, consideran la dependencia de forma separada en diferentes direcciones. Además, solo permite el uso del instrumento variográfico, que no de covariogramas. Otros modelos anisotrópicos propuestos en la literatura, como los de Dimitrakopoulos y Lou (1994) y Fernández-Casal *et al.* (2003) resultan de difícil interpretación y, además, no se obtienen con forma cerrada. Estos problemas quedarán resueltos con la clase de Bernstein arriba propuesta. Otra característica destacable es su fácil extensión al caso de funciones de covarianza temporalmente asimétricas. De hecho, si la medida F de la transformada bivalente de Laplace está concentrada en la línea $\omega_1=\omega_2$, entonces L es una función completamente monótona. Sea ahora la función de

covarianza espacial $C_s(h_1, \dots, h_d) = \varphi\left(\sum_{i=1}^d \psi_i(|h_i|)\right)$ e introduzcamos

una variable aleatoria perturbación, V , que puede interpretarse físicamente como un indicador escalar de velocidad. Entonces se tiene que:

$$C_{st}(h_1, \dots, h_d, u) = E_V C_s(|h_1|, \dots, |h_1 - Vu|, \dots, h_d) = E_V \varphi\left(\sum_{j \neq i} \psi_j(|h_j|) + \psi_i(|h_i - Vu|)\right)$$

es una función de covarianza espacio temporal perteneciente a la clase de Bernstein, pero asimétrica en el tiempo.

Los resultados que se obtienen de concentrar F en la línea $\omega_1=\omega_2$, son, a nuestro juicio, de elevado interés.

Resultado 1. Sea φ una función completamente monótona definida sobre la recta real positiva y tal que $\varphi(0)=1$. Sean ψ_1, ψ_2, ψ_3

funciones de Bernstein, y γ_s, γ_t dos semivariogramas, espacial y temporal, respectivamente, intrínsecamente estacionarios. Entonces:

$$\varphi(\psi_1(\gamma_s(\mathbf{h})) + \psi_2(\gamma_t(u))) \quad \text{y} \quad \varphi(\psi_3(\psi_1(\gamma_s(\mathbf{h}))) + \psi_2(\gamma_t(u))) \quad (2)$$

son funciones de covarianza estacionarias en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

A estos efectos, téngase en cuenta que si la medida F de la transformada bivalente de Laplace está concentrada en la línea $\omega_1 = \omega_2$, entonces L es una función completamente monótona.

$$C_{st}(\mathbf{h}, u) = L\left(\sum_{i=1}^d \psi_i(|h_i|), \psi_t(u)\right) L(\psi_1(|h_1|), \psi_t(|u|)) = \int_0^\infty \int_0^\infty \prod_{i=1}^d e^{-\psi_i(h_i)\omega_1} e^{-\psi_t(u)\omega_2} dF(\omega_1, \omega_2) =$$

$$\int_0^\infty \prod_{i=1}^d e^{-[\psi_i(h_i) + \psi_t(|u|)]\omega} dF(\omega) = \int_0^\infty e^{-[\sum_{i=1}^d \psi_i(h_i) + \psi_t(|u|)]\omega} dF(\omega)$$

Resultado 2. Sea φ una función completamente monótona definida sobre la recta real positiva y tal que $\varphi(0) = 1$ y que $\varphi^{(2k)}(0)$ existe y es finita para cualquier entero k . Sean ψ_1, ψ_2 funciones de Bernstein, y C dos semivariogramas, espacial y temporal, respectivamente, intrínsecamente estacionarios. Entonces:

$$\varphi^{(2k)}\left(\gamma_s(\mathbf{h}_1) + \gamma_t(u) \varphi\left(\psi_1(\|\mathbf{h}_2\|^2) + \psi_2(\|\mathbf{h}_3\|^2)\right)\right)$$

es una función de covarianza estacionaria en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3 \in \mathbb{R}^d$

Obsérvese la importancia de los resultados expuestos, por cuanto permiten, a través de una simple mezcla escalar univariante la construcción de funciones de covarianza espacio-temporales zonalmente anisotrópicas. Nótese, además, que el procedimiento expuesto da lugar a formas cerradas de fácil obtención.

Una última y breve nota cabe destacar al finalizar estas dos últimas secciones relativas a la generación de nuevas familias de covarianza anisotrópicas y/o no estacionarias que puedan resultar de utilidad en el marco de las energías renovables en general, y de la energía eólica en particular. Siguiendo a Porcu *et al.* (2007) y Mateu *et al.* (2008), se puede proponer un operador que preserve el carácter anisotrópico o no estacionario de una función de covarianza; en particular, este operador, "La Descente" (relacionado con el operador diferenciación), actuando sobre una función de

covarianza de una manera particular, y definido sobre un espacio d -dimensional, es capaz de conducirnos a nuevas funciones de covarianza definidas en espacios con mayores dimensiones y preserva las características de la función de partida.

En términos coloquiales, el principal problema es detectar si es posible preservar la condición de definida positiva, incluso no necesariamente en el mismo espacio euclídeo d -dimensional, aplicando operadores de integración y derivación a funciones radiales definidas positivas con soporte en \mathbb{R}^d . Por esta razón, Matheron en su texto *“Les variables régionalisées et leur estimation: une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature”* acuñó el término *“Descente”* para denotar la diferenciación de una función radial definida positiva.

El procedimiento de Porcu *et al.* (2007) y Mateu *et al.* (2008) extiende al caso anisotropía en la componente espacial con isotropía en sus componentes un procedimiento inicialmente planteado en un contexto completamente isotrópico. La utilización del operador anteriormente mencionado da lugar a algunas interesantes características matemáticas de las funciones de covarianza con componentes isotrópicos. Este aspecto no es nuevo en la literatura a la hora de considerar funciones de covarianza permisibles que sean isotrópicas y que representen la función característica de un vector aleatorio esférico simétricamente distribuido. No se presenta resultado particular alguno en el ámbito no estacionario, si bien la utilización del operador en dicho contexto constituye una prometedora línea de investigación.

6.- Conclusiones.

En este artículo se pone de manifiesto el hecho de que, a pesar de la importancia y potencial de la energía eólica y del incremento constante, incluso en el periodo presente de crisis económica, de la potencia eólica instalada, hay un aspecto al que no se le presta la suficiente atención: el desarrollo de tecnología estadística destinada a la ubicación óptima de parques eólicos, interiores y *off-shore*, ya que la modelización del comportamiento del viento permitirá, con la misma capacidad instalada, una mayor generación eléctrica.

Es cierto que dicha modelización debe ser abordada desde la árida, a veces difícilmente penetrable, disciplina de la Geoestadística, pero no es menos cierto que una mejor modelización implica una mejor ubicación (cuando no óptima) de los parques o granjas eólicas y un mayor rendimiento para una misma potencia instalada. Y esto, dada la problemática de precios que rodea a la energía eólica, es mucho decir.

No es que en el sector no se conozcan los principales modelos de covarianza espacio-temporal susceptibles de utilización en la predicción de la fuerza del viento sobre un área de interés, pero es una realidad que los usuarios de dichos modelos (en caso de que se utilicen, lo cual resulta harto dudoso) acostumbran a sentarse en la parte cómoda de los mismos, es decir, en los sillones de la isotropía y la estacionariedad. Es cierto que estas dos suposiciones simplifican mucho la cuestión del modelado de las dependencias espacio-temporales, pero, de nuevo, no es menos cierto que las dependencias espacio-temporales de la fuerza del viento, por más que nos convenga, ni son isotrópicas ni estacionarias.

Es por ello que en este artículo se aportan algunos resultados que permiten una incursión en el campo de la anisotropía y de la no estacionariedad espacial. Sí, son resultados áridos para un lector no familiarizado con el campo de la Geoestadística espacio-temporal, pero muy útiles y, sobre todo, potencialmente rentables. Y esto es mucho decir en un marco como el de las energías renovables en general, y el de la energía eólica en particular.

Aún así, queda mucho trabajo por hacer. Entre otras cosas, resulta de particular interés, como nueva línea de investigación en el marco de las energías renovables en general, y de la energía eólica en particular, un camino alternativo basado en la modelización de las dependencias espacio-temporales mediante modelos dinámicos, ya que éstos hacen uso de la estructura dinámica subyacente a muchos fenómenos reales.

Dicho de una manera muy breve, una estructura dinámica tiene los siguientes fundamentos. Considérese el vector de observaciones $m_t \times 1$, $Z_t = (Z(r_1, t), \dots, Z(r_m, t))$, donde $Z(r_i, t)$ representa una observación de un proceso espacio-temporal en la localización $r_i \in D \subset \mathbb{R}^2$ e instante temporal $t \in T \subset \mathbb{R}$. Pero en realidad el investigador está interesado en un proceso real pero no observado

(oculto) espacio-temporal $Y(\mathbf{s}, t)$ y en predecir este proceso en n localizaciones espaciales, y por tanto considerar el vector del proceso $n_t \times 1$, $Y_t = (Y(\mathbf{s}_1, t), \dots, Y(\mathbf{s}_n, t))$. Nótese que las r localizaciones donde observamos no tienen por qué coincidir con las n localizaciones de predicción. Uno de los aspectos de interés en este contexto dinámico es cómo se explota la independencia condicional. Es decir, podemos particionar la distribución conjunta del proceso observado y real en las siguientes distribuciones condicionales:

$$[Z_1, \dots, Z_T, Y_1, \dots, Y_T] = [Z_1, \dots, Z_T | Y_1, \dots, Y_T] [Y_1, \dots, Y_T] = \prod_{t=1}^T [Z_t | Y_t] [Y_1, \dots, Y_T] = \prod_{t=1}^T [Z_t | Y_t] [Y_t | Y_{t-1}] [Y_0]$$

Se asume, por simplicidad, una estructura Markoviana de primer orden en la distribución del proceso real. Por tanto la especificación de la distribución de las observaciones $[Z_t | Y_t]$ y de la distribución del proceso $[Y_t | Y_{t-1}]$ son las claves de este procedimiento dinámico. Así, por ejemplo, el uso de modelos deterministas como ecuaciones en derivadas parciales o ecuaciones integro-diferenciales pueden ser utilizados en este contexto proporcionando una visión tal vez más realista de la dinamicidad de muchos procesos espacio-temporales.

Bibliografía.

- ASOCIACIÓN EMPRESARIAL EÓLICA (AEE) : <http://www.aeeolica.es/contenidos>.
- IEA WIND ENERGY (2009). Annual Report 2008. www.ieawing.org.
- BERG, C. y FORST, G. (1975): *Potential theory on locally compact abelian groups*. Springer, New York.
- BERNSTEIN, S. N. (1928): Sur les fonctions absolument monotones. *Acta Math*, 52, 1-66.
- BOCHNER, S. (1933) : Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse. *Mathematische Annalen*, 108(1), 378-410.
- BROWN, P. E., KARESEN, K. F., ROBERTS, G. O. y TONELLATO, S. (2000): Blur-generated nonseparable space-time models. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 62, pp. 847-860.
- CHEN, L., FUENTES, M. y DAVIS, J. M. (2006): Spatial temporal statistical modelling and prediction of environmental processes. En J.S. Clark and A. GELFAND Eds.), *Hierarchical Modelling for the Environmental Sciences*, Oxford Univ. Press, pp. 121-144.
- CRESSIE, N. A. C. y HUANG, C. (1999): Classes of nonseparable, spatiotemporal stationary covariance functions, *Journal of the American Statistical Association*, 94, pp. 1330-1340.
- DE CESARE, L., MYERS, D. E. & POSA, D. (2001a): Estimating and modeling space-time correlation structures. *Statistics and Probability Letters*, 51, pp. 9-14.

- DE CESARE, L., MYERS, D. E. y POSA, D. (2001b): Product-sum covariance for space-time modeling: an environmental application. *Environmetrics*, 12, pp.11-23,
- DE CESARE, L., MYERS, D. E. y POSA, D. (2002) : FORTRAN programs for space-time modeling. *Computers & Geosciences*, 28, pp.205-212.
- DE IACO, S., MYERS, D. E. y POSA, D. (2001): Space-time analysis using a general product-sum model. *Statistics and Probability Letters*, 52, pp.21-28.
- DE IACO, S., MYERS, D. E. y POSA, D. (2002a): Space-time variograms and a functional form for total air pollution measurements. *Computational Statistics & Data Analysis*, 41, 311-328,
- DE IACO, S., MYERS, D. E. y POSA, D. (2002b): .Nonseparable space-time covariance models: some parametric families. *Mathematical Geology*, 34, pp. 23-42.
- DE IACO, S., MYERS, D. E. y POSA, D. (2003): The linear coregionalization model and the product-sum space-time variogram. *Mathematical Geology*, 35, pp. 25-38.
- DIMITRAKOPOULOS, R. y LOU, X. (1994): Spatiotemporal modeling: covariances and ordinary kriging system, en: Dimitrakopoulos, R. (ed.): *Geostatistics for the next century*, Dordrecht (The Netherlands): Kluwer Academic Publisher, 88–93.
- FERNÁNDEZ-CASAL, R. (2003): *Geostatística espacio-temporal, modelos flexibles de variogramas anisotropicos no separables*. University of Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, Spain.
- FUENTES, M. (2002): Spectral methods for nonstationary spatial processes. *Biometrika*, 89, pp.197-210.
- FUENTES, M. y SMITH, R. (2001): *A new class of nonstationary spatial models*. Research Report of the Statistics Department at North Carolina State University.
- FUENTES, M., CHEN, L., DAVIS, J. y LACKMANN, G. (2005): A new class of nonseparable and nonstationary covariance models for wind fields. *Environmetrics*, 16, 449-464.
- GNEITING, T. (2002): Stationary covariance functions for space–time data, *Journal of the American Statistical Association*, 97, 590–600.
- GNEITING, T., GENTON, M.G. y GUTTORP, P. (2005). *Geostatistical space-time models, stationarity, separability, and full symmetry*. Technical Report n. 475, University of Washington.
- GRADSHTEYN, I.S. y RYZHIK, I.M. (1980): *Tables of Integrals, Series, and Products* (4th ed.). Academic Press, San Diego, CA.
- GREGORI, P., PORCU, E., MATEU, J. y SASVÁRI, Z. (2007): On potentially negative space time covariances obtained as sum of products of marginal ones. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, DOI: 10.2007/s10463-007-0122-8.
- JONES, R. H. y ZHANG, Y. (1997): Models for continuous stationary space–time processes, en: Gregoire, T. G., Brillinger, D. R., Diggle, P. J., Russek-Cohen, E., Warren, W. G. y Wolfinger, R.D. (eds.): *Modelling longitudinal and spatially correlated data*, Springer Verlag, New York, pp. 289–298.
- KOLOVOS, A., CHRISTAKOS, G., HRISTOPULOS, D. T. y SERRE, L. (2004): Methods for generating non-separable spatiotemporal covariance models with potential environmental applications, *Advances in Water Resources*, 27, pp. 815–830.
- MA, C. (2002): Spatio-temporal covariance functions generated by mixtures, *Mathematical Geology*, 34, pp. 965–974.
- MA, C. (2003a): Families of spatio-temporal stationary covariance models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 116, pp.489-501,
- MA, C. (2003b): Spatio-temporal stationary covariance models. *Journal of Multivariate Analysis*, 86, pp. 97-107.
- MA, C. (2003c): Nonstationary covariance functions that model space-time interactions. *Statistics and Probability Letters*, 61, pp. 411-419.
- MA, C. (2005a): Linear combinations of space-time covariance functions and variograms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 53, pp. 857-864.

- MA, C. (2005b): Semiparametric spatio-temporal covariance models with the ARMA temporal margin. *Annals of the Institute of Mathematical Statistics*, 57, pp. 221-233.
- MA, C. (2005c): Spatio-temporal variograms and covariance models. *Advances in Applied Probability*, 37, pp. 706-725.
- MARTÍNEZ, F., MATEU, J., MONTES, F., BODAS-SALCEDO, A. y LÓPEZ-BAEZA, E. (2008): A comparative analysis of different spatial sampling schemes: modelling of SSRB data. *International Journal of Remote Sensing*, 29(6), pp. 1635-1647.
- MATEU, J., PORCU, E. y GREGORI, P. (2008): Recent advances to model anisotropic space-time data. *Statistical Methods & Applications*, 17, pp. 209-223.
- MITCHELL, M., GENTON, M. G. y GUMPERTZ, M. (2005): Testing for separability of space-time covariances, *Environmetrics*, 16, 819-831.
- MYERS, R. H., MONTGOMERY, D. C. y VINING, G. G. (2002): *Generalized linear models: With applications in engineering and the sciences*. John Wiley & Sons, New York.
- PACIOREK, Ch. J. y SCHERVISH M. J. (2006): Spatial modelling using a new class of nonstationary covariance functions. *Environmetrics*, 17(5), pp.483-506.
- PORCU, E., GREGORI, P. y MATEU, J. (2006): Nonseparable stationary anisotropic space-time covariance functions, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 21(2), 113-122.
- PORCU, E., MATEU, J. y BEVILACQUA, M. (2007a): Covariance functions which are stationary or nonstationary in space and stationary in time. *Statistica Neerlandica*, 61 (3), pp. 358-382. Technical Report, 98-2005, Universitat Jaume I.
- PORCU, E., GREGORI, P. y MATEU, J. (2007b): La descente et la montée étendues: the spatially d-anisotropic and the spatio-temporal case, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. 17, pp.24-36.
- PORCU, E. y MATEU, J. (2007): Mixture-based modeling for space-time data. *Environmetrics*, 18, 285-302, pp. 88-2005, Universitat Jaume I.
- PORCU E., MATEU, J. y SAURA, F. (2008): New classes of covariance and spectral density functions for spatio-temporal modelling. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 22(1), pp. 65-79.
- PORCU, E., GREGORI, P. y MATEU, J. (2007): La descente et la montée étendues: the spatially d-anisotropic and the spatiotemporal case. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 21 (6), pp. 683-693
- PORCU, E., GREGORI, P. y MATEU, J. (2009a): Archimedean spectral densities for nonstationary space-time Geostatistics. *Statistica Sinica*, 19 (1), pp. 273-286.
- PORCU, E., MATEU, J. y CHRISTAKOS, G. (2009b): Quasi-arithmetic means of covariance functions with potential applications to space-time data. *Journal of Multivariate Analysis*, 100, pp. 1830-1844.
- PORCU, E., MATKOWSKI, J. y MATEU, J. (2009c). On the non-reducibility of non-stationary correlation functions to stationary ones under a class of mean-operator transformations. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. DOI: 10.1007/s00477-009-0347-6.
- ROUHANI, S. y HALL, T. J. (1989): Space-time kriging of groundwater data, in: Armstrong M. (ed.), *Geostatistics*, Dordrecht (The Netherlands): Kluwer Academic Publishers Vol. 2, pp. 639-651.
- SCHOENBERG, I. J. (1938): Metric spaces and positive definite functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 44(3), 522-536.
- STEIN, M. L. (2005): Space-time covariance functions, *Journal of the American Statistical Association*, 100, pp- 310-321.
- WHITTLE, P. (1954): On stationary processes in the plane, *Biometrika*, 41, 434-449.